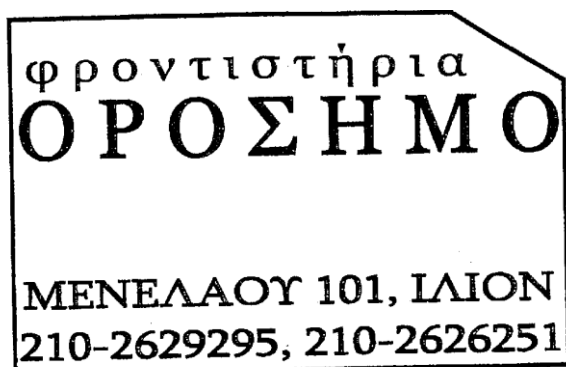




Ημερομηνία: 28/8/26

Τμήμα: ΓΘ

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Καθηγητής: Παναγιωτόπουλος

Ονοματεπώνυμο:

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. (Μονάδες 5)
- A2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες; (Μονάδες 5)
- A3. Να ορίσετε πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1. (Μονάδες 5)
- A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος. (Μονάδες 10)
- α) Αν μια συνάρτηση είναι 1-1, τότε είναι γνησίως μονότονη.
- β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντιστοίχως, τότε η συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.
- γ) Αν για δύο συναρτήσεις f και g ορίζονται οι συνθέσεις τους $g \circ f$ και $f \circ g$ τότε αυτές θα είναι ίσες.
- δ) Αν υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, τότε $f(f^{-1}(x)) = x, x \in A$.
- ε) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

στ) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 0$.

ζ) Αν $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$.

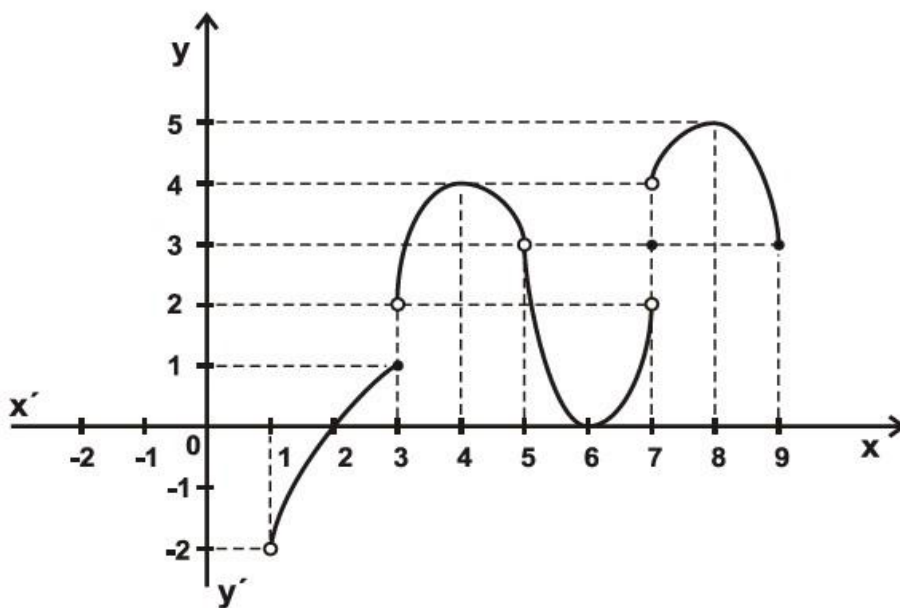
η) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

θ) Ισχύει $|\eta \mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ι) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται μόνο από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



Β1. α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(9)$, $f(f(7))$. (Μονάδες 5)

γ) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f(\sqrt{3})$. (Μονάδα 1)

δ) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης f και τις θέσεις τους. (Μονάδα 1)

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$. (Μονάδα 1)

B2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 5} f(x) \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 7} f(x) \quad \varepsilon) \lim_{x \rightarrow 9} f(x)$$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

B3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 8} f(f(x)) \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{f(x) - 5}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha$ και $g(x) = x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = -1$.

(Μονάδες 5)

Γ2. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση τους εφόσον υπάρχει.

(Μονάδες 6)

Γ3. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $\varphi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)}$.

(Μονάδες 6)

Γ4. Έστω η συνάρτηση $h : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x) + 2 \leq h(x) \leq g(x) + 2$, για κάθε $x \in [0,1]$.

i) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$.

(Μονάδες 3)

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h(x) + 7} - 3}{h^2(x) - 4}$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R} - \{3\}$. (Μονάδες 5)

Δ2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες. (Μονάδες 8)

Δ3. Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$. (Μονάδες 6)

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left(f(x) \eta \mu \frac{1}{3x+1} \right)$. (Μονάδες 6)